第 59 卷　第 5 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 59　No. 5
2020 年　9 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Sept.　2020

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2019. 06. 21. 2019A048

时标上 Leakage 项变时滞 BAM 神经网络系统的概周期解*

高瑾[1]，林园[2]，王其如[3]
（1. 深圳信息职业技术学院计算机学院，广东 深圳 518172；
2. 深圳信息职业技术学院公共课教学部，广东 深圳 518172；
3. 中山大学数学学院，广东 广州 510275）

摘　要：研究了时标上的 Leakage 项变时滞双向联想记忆（BAM）神经网络系统，给出了其概周期解存在性、唯一性和全局指数稳定性的充分条件。另外还给出了一个例子和数值模拟来说明得到结果的正确性。

关键词：双向联想记忆神经网络；时标；概周期解；全局指数稳定性

中图分类号：O193　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2020）05－0029－11

Almost-periodic solutions for BAM neural networks with time-varying delays in leakage terms on time scales

GAO Jin[1]，*LIN Yuan*[2]，*WANG Qiru*[3]
（1. School of Computer Sciences，Shenzhen Institute of Information Technology，Shenzhen 518172，China；
2. Department of Public Courses，Shenzhen Institute of Information Technology，Shenzhen 518172，China；
3. School of Mathematics，Sun Yat-sen University，Guangzhou 510275，China）

Abstract：The almost-periodic solutions for BAM neural networks with time-varying delays in leakage terms on time scales are concerned. Some sufficient conditions about the existence，uniqueness and global exponential stability of almost-periodic solutions are given. An example and numerical simulations are established to illustrate the feasibility and effectiveness of the results.

Key words：BAM neural networks；time scales；almost-periodic solutions；global exponential stability

Kosko[1-3]首先研究了一种新的神经网络系统，叫做双向联想记忆（BAM）神经网络系统。从此，BAM 神经网络系统被广泛地研究，它可以应用到图像处理，模式识别，优化问题，联想记忆等方面。在其应用中，神经网络系统的概周期解、周期解、渐近概周期解和伪概周期解等都是很具有吸引力的研究方向。因此，双向联想记忆（BAM）神经网络系统的概周期解被很多学者深入研究[4-8]。

经过多年的研究和发展，时标理论已经成为研究连续系统和离散系统的有效手段，具有广泛的应用前景，尤其在解的存在性、振动性、周期解、稳定性等方面发展迅速[9-10]。但是时标上 BAM 神经网络系统的概周期解却很少被研究。

鉴于此研究的重要性，在本文中，我们将要研究以下形式的时标上 Leakage 项变时滞双向联想记忆（BAM）神经网络系统：

* **收稿日期：**2019－06－21
基金项目：国家自然科学基金（11671406）；深圳信息职业技术学院校级科研培育项目（QN201703）
作者简介：高瑾（1985 年生），女；**研究方向：**泛函微分方程；E-mail：306996140@qq. com
通信作者：林园（1987 年生），男；**研究方向：**泛函微分方程；E-mail：229617098@qq. com

$$\begin{cases} x_i^{\nabla}(t) = -a_i(t)x_i\big(t-\alpha_i(t)\big) + \sum_{j=1}^{m} p_{ji}(t)\int_0^{+\infty} K_{ji}(s) f_j\big(y_j(t-s)\big)\nabla s + I_i(t), \\ y_j^{\nabla}(t) = -b_j(t)y_j\big(t-\beta_j(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t)\int_0^{+\infty} L_{ij}(s) f_i\big(x_i(t-s)\big)\nabla s + J_j(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m, t \in \mathbb{T}$，$\mathbb{T}$ 是一个概周期时标，n 和 m 是每个细胞层的细胞数量，$x_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别是第 i 个细胞和第 j 个细胞时刻 t 的活动状态；$a_i(t)$ 和 $b_j(t)$ 分别代表第 i 个细胞和第 j 个细胞和网络与外部输入在第 t 时刻脱节时，他们将电势重置为孤立情形下的休克状态的重置率；f_i，f_j 是激活函数；$\alpha_i(t),\beta_j(t)$ 是时刻 t 的传递时滞；K_{ji}, L_{ij} 是时滞核函数；$I_i(t)$ 和 $J_j(t)$ 分别表示第 i 个细胞和第 j 个细胞时刻 t 的偏差。

系统（1）的初始条件为

$$x_i(s) = \varphi_i(s), y_j(s) = \psi_j(s), s \in (-\infty, 0]_{\mathbb{T}}$$

其中 $\varphi_i, \psi_j \in C^1\big((-\infty,0]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\big)$ 且有界，$(-\infty,0]_{\mathbb{T}} = \{t \mid t \in (-\infty,0] \cap \mathbb{T}\}, i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m$。

1 预备知识

本节我们给出一些基本的定义和定理[11-15]。

定义 1[13] 称 $\mathbb{T}$ 是一个时标，若 $\mathbb{T}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的任意非空闭子集并且继承实数集 $\mathbb{R}$ 的拓扑结构和有序性。对于 $t \in \mathbb{T}$，时标上的前跳算子 $\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 定义为：$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$；后跳算子 $\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 定义为：$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$。

定义 2[13] 设 $\mathbb{T}$ 是一个时标，$t \in \mathbb{T}$ 被称为左稠密点，如果 $t > \inf \mathbb{T}$ 且 $\rho(t) = t$；左稀疏点如果 $\rho(t) < t$；右稠密点如果 $t < \sup \mathbb{T}$ 且 $\sigma(t) = t$；右稀疏点如果 $\sigma(t) > t$。如果 $\mathbb{T}$ 有一个最大的左稀疏点 m，则 $\mathbb{T}^k := \mathbb{T}\backslash\{m\}$；否则 $\mathbb{T}^k \coloneqq \mathbb{T}$。如果 $\mathbb{T}$ 有一个最小的右稀疏点 m，则 $\mathbb{T}_k := \mathbb{T}\backslash\{m\}$；否则 $\mathbb{T}_k := \mathbb{T}$。

定义 3[13] 函数 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 被称为左稠连续或者 ld–连续函数，如果其在 $\mathbb{T}$ 中的左稠密点连续，且在 $\mathbb{T}$ 中右稠密点的右极限存在。函数 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 被称为右稠连续或者 rd–连续，如果其在 $\mathbb{T}$ 中的右稠密点连续，且在 $\mathbb{T}$ 中左稠密点的左极限存在。

定义 4[15] 设 $\mathbb{T}$ 是一个时标，$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$，称函数 f 在 $t \in \mathbb{T}_k$ 是 $\nabla-$可导，对任意 $\varepsilon > 0$，若存在 t 的 $\delta-$邻域 U（即 $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$）使得

$$\Big|\big[f\big(\rho(t)\big) - f(s)\big] - f^{\nabla}(t)\big[\rho(t) - s\big]\Big| \leqslant \varepsilon\left|\rho(t) - s\right| \quad 任意 s \in U$$

如果函数 f 对所有 $t \in \mathbb{T}_k$ 是 $\nabla-$可导，则称函数 f 在 $\mathbb{T}_k$ 是 $\nabla-$可导。

如果 f 是左稠连续函数，则存在一个函数 F 使得 $F^{\nabla}(t) = f(t)$。在此情况下，我们定义

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$$

定义 5[15] 如果 $p \in \mathbb{R}_\nu$，则对于 $s,t \in \mathbb{T}$，我们定义 Nabla 指数函数如下：

$$\hat{e}_p(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\nabla\tau\right\}$$

其中 $\nu-$柱形变换

$$\hat{\xi}_h(z) = \begin{cases} \dfrac{-\log(1-hz)}{h}, & h \neq 0, \\ z, & h = 0 \end{cases}$$

定义 6[13] 如果 $p,q \in \mathbb{R}_\nu$，则对于任意的 $t \in \mathbb{T}_k$，我们定义 $\big(p \oplus_\nu q\big)(t) := p(t) + q(t) - p(t)q(t)\nu(t)$；对于 $p \in R_\nu$，定义 $\Theta_\nu p := \dfrac{-p}{1-\nu p}$。

定义 7[14] 时标 $\mathbb{T}$ 被称为一个概周期时标，如果 $\prod := \{\tau \in \mathbb{R}: t \pm \tau \in \mathbb{T}, \forall t \in \mathbb{T}\} \neq \{0\}$。

定义 8 [14]　设 $\mathbb{T}$ 是一个概周期时标，$\mathbb{E}=\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$。函数 $f\in C(\mathbb{T},\mathbb{E}^n)$ 被称为一个概周期函数，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，其 ε −平移数集 $E\{\varepsilon,f\}=\{\tau\in\prod:|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon,\forall t\in\mathbb{T}\}$ 在 $\mathbb{T}$ 中相对稠密；也就是说，对任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 $l(\varepsilon)>0$，使得每个长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间内总包含至少一个 $\tau(\varepsilon)\in E\{\varepsilon,f\}$，使得 $|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon,\forall t\in\mathbb{T}$。其中 τ 叫做 f 的 ε −平移数，$l(\varepsilon)$ 叫做 $E\{\varepsilon,f\}$ 的包含区间长。

定义 9 [11-12]　设 $A(t)$ 是 $\mathbb{T}$ 上的 $n\times n$ 阶左稠连续矩阵函数，则线性系统

$$x^{\nabla}(t)=A(t)x(t),t\in\mathbb{T} \tag{2}$$

被称为在 $\mathbb{T}$ 上可指数二分的，如果存在正常数 $k_i,\alpha_i,i=1,2$，投影 P 和基解矩阵 $X(t)$ 使得

$$\left|X(t)PX^{-1}(s)\right|\leqslant k_1\hat{e}_{\Theta_\nu\alpha_1}(t,s),s,t\in\mathbb{T},t\geqslant s,$$

$$\left|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\right|\leqslant k_2\hat{e}_{\Theta_\nu\alpha_2}(s,t),s,t\in\mathbb{T},t\leqslant s$$

其中 $|\cdot|$ 是矩阵范数，即 $|A(t)|=\sqrt{\sum_{ij}a_{ij}^2(t)}$。

考虑如下概周期系统

$$x^{\nabla}(t)=A(t)x(t)+g(t),t\in\mathbb{T} \tag{3}$$

其中 $A(t)$ 是一个概周期矩阵函数，$g(t)$ 是一个概周期向量函数。

引理 1 [11-12]　设 $X(t)$ 是系统（2）的一个基解矩阵，如果系统（2）可指数二分，则系统（3）有如下唯一的概周期解：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(\rho(s))g(s)\nabla s-\int_{t}^{+\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(\rho(s))g(s)\nabla s$$

引理 2 [11-12]　设 $c_i(t)$ 是概周期函数，对于 $i=1,2,\cdots,n,t\in\mathbb{T}$，有

$$c_i(t)\in R_\nu^+,c_i(t)>0,\min_{1\leqslant i\leqslant n}\inf_{t\in\mathbb{T}}c_i(t)=\overline{m}>0$$

则下列线性系统

$$x^{\nabla}(t)=\mathrm{diag}\left(-c_1(t),-c_2(t),\cdots,-c_n(t)\right)x(t) \tag{4}$$

在 $\mathbb{T}$ 上可指数二分。

2　概周期解的存在唯一性

本节，我们给出了系统（1）概周期解的存在唯一性的充分条件。

对于 $i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$，我们有如下表示：

$$\overline{a_i}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|a_i(t)|,\ \underline{a_i}=\inf_{t\in\mathbb{T}}|a_i(t)|,\ \overline{b_j}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|b_j(t)|,\ \underline{b_j}=\inf_{t\in\mathbb{T}}|b_j(t)|,$$

$$\overline{\alpha_i}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|\alpha_i(t)|,\overline{\beta_j}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|\beta_j(t)|,\overline{K_{ji}}=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbb{T}}}|K_{ji}(t)|,\overline{L_{ij}}=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbb{T}}}|L_{ij}(t)|,$$

$$\overline{I_i}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|I_i(t)|,\ \overline{J_j}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|J_j(t)|,\ \overline{p_{ji}}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|p_{ji}(t)|,\ \overline{q_{ij}}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|q_{ij}(t)|$$

在本文中，对于任意 $i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$，我们有以下假设：

(H_1) $K_{ji},L_{ij}:[0,+\infty)_{\mathrm{T}}\to\mathrm{R}$ 为左稠连续函数，$|K_{ji}(s)|$，$|L_{ij}(s)|$ 在 $[0,+\infty)_{\mathbb{T}}$ 上 $\nabla-$ 可积，$p_{ji},q_{ij},I_i,J_j\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}),a_i,b_j,\alpha_i,\beta_j\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)$ 都是概周期函数，$a_i(t)\in\mathbb{R}_\nu^+,\underline{a_i}>0,b_j(t)\in\mathbb{R}_\nu^+,\underline{b_j}>0$；

(H_2) 存在正常数 F_j,F_i 使得对于 $u_1,u_2\in\mathbb{R}$，有

$$\left|f_j(u_1)-f_j(u_2)\right|\leqslant F_j|u_1-u_2|,\left|f_i(u_1)-f_i(u_2)\right|\leqslant F_i|u_1-u_2|$$

(H_3) 存在一个正常数 r_0 使得

$$\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{A_i}{\underline{a_i}},\left(1+\frac{\overline{a_i}}{\underline{a_i}}\right)A_i\right\},\max_{1\leqslant j\leqslant m}\left\{\frac{B_j}{\underline{b_j}},\left(1+\frac{\overline{b_j}}{\underline{b_j}}\right)B_j\right\}\right\}\leqslant r_0,$$

$$\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{S_i}{\underline{a}_i},\left(1+\frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i}\right)S_i\right\},\max_{1\leqslant j\leqslant m}\left\{\frac{T_j}{\underline{b}_j},\left(1+\frac{\overline{b}_j}{\underline{b}_j}\right)T_j\right\}\right\}<1$$

其中

$$A_i=\overline{a}_i r_0\overline{\alpha}_i+\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{ji}}\left(F_j r_0+\left|f_j(0)\right|\right)\int_0^{+\infty}\left|K_{ji}(s)\right|\nabla s+\overline{I}_i,$$

$$B_j=\overline{b}_i r_0\overline{\beta}_j+\sum_{i=1}^{n}\overline{q_{ij}}\left(F_i r_0+\left|f_i(0)\right|\right)\int_0^{+\infty}\left|L_{ij}(s)\right|\nabla s+\overline{J}_j,$$

$$S_i=\overline{a}_i\cdot\overline{\alpha}_i+\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{ji}}F_j\int_0^{+\infty}\left|K_{ji}(s)\right|\nabla s,\quad T_j=\overline{b}_j\cdot\overline{\beta}_j+\sum_{i=1}^{n}\overline{q_{ij}}F_i\int_0^{+\infty}\left|L_{ij}(s)\right|\nabla s$$

设 $\mathbb{B}=\{\Phi=\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m\right)^{\mathrm{T}}\left|\varphi_i,\psi_j\in C^1(\mathbb{T},\mathbb{R})\right.$ 是概周期函数，$i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m\}$有范数$\|\Phi\|_{\mathbb{B}}=\sup\limits_{t\in\mathbb{T}}\|\Phi(t)\|$，其中

$$\|\Phi(t)\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m}\left\{\left|\varphi_i(t)\right|,\left|\varphi_i^{\nabla}(t)\right|,\left|\psi_j(t)\right|,\left|\psi_j^{\nabla}(t)\right|\right\},$$

则$\mathbb{B}$是一个Banach空间。

定理1 设条件$\left(\mathrm{H}_1\right)-\left(\mathrm{H}_3\right)$成立。则系统（1）在$E:=\left\{\varphi\in\mathbb{B}:\|\varphi\|_{\mathbb{B}}\leqslant r_0\right\}$中有一个唯一的概周期解。

证明 将系统（1）改写成如下形式：

$$\begin{cases}x_i^{\nabla}(t)=-a_i(t)x_i(t)+a_i(t)\int_{t-\alpha_i(t)}^{t}x_i^{\nabla}(s)\nabla s+\sum_{j=1}^{m}p_{ji}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)f_j\left(y_j(t-s)\right)\nabla s+I_i(t),i=1,2,\cdots,n,\\ y_j^{\nabla}(t)=-b_j(t)y_j(t)+b_j(t)\int_{t-\beta_j(t)}^{t}y_j^{\nabla}(s)\nabla s+\sum_{i=1}^{n}q_{ij}(t)\int_0^{+\infty}L_{ij}(s)f_i\left(x_i(t-s)\right)\nabla s+J_j(t),j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

对于任意给定的$Z(t)=\left(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_m(t)\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{B}$，我们考虑如下概周期系统：

$$\begin{cases}x_i^{\nabla}(t)=-a_i(t)x_i(t)+a_i(t)\int_{t-\alpha_i(t)}^{t}\varphi_i^{\nabla}(s)\nabla s+\sum_{j=1}^{m}p_{ji}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)f_j\left(\psi_j(t-s)\right)\nabla s+I_i(t),i=1,2,\cdots,n,\\ y_j^{\nabla}(t)=-b_j(t)y_j(t)+b_j(t)\int_{t-\beta_j(t)}^{t}\psi_j^{\nabla}(s)\nabla s+\sum_{i=1}^{n}q_{ij}(t)\int_0^{+\infty}L_{ij}(s)f_i\left(\varphi_i(t-s)\right)\nabla s+J_j(t),j=1,2,\cdots,m\end{cases}\tag{5}$$

设

$$\begin{cases}L_i(t)=a_i(t)\int_{t-\alpha_i(t)}^{t}\varphi_i^{\nabla}(s)\nabla s+\sum_{j=1}^{m}p_{ji}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)f_j\left(\psi_j(t-s)\right)\nabla s+I_i(t),i=1,2,\cdots,n,\\ M_j(t)=b_j(t)\int_{t-\beta_j(t)}^{t}\psi_j^{\nabla}(s)\nabla s+\sum_{i=1}^{n}q_{ij}(t)\int_0^{+\infty}L_{ij}(s)f_i\left(\varphi_i(t-s)\right)\nabla s+J_j(t),j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

由条件$\left(\mathrm{H}_1\right)$和引理2得到，下列线性系统

$$\begin{cases}x_i^{\nabla}(t)=-a_i(t)x_i(t),\\ y_j^{\nabla}(t)=-b_j(t)y_j(t)\end{cases}$$

是指数二分的。因此，由引理1，我们知道系统（5）有唯一的概周期解，可以表示如下：

$$U_Z(t)=\left\{\int_{-\infty}^{t}\hat{e}_{-a_1}\left(t,\rho(s)\right)L_1(s)\nabla s,\cdots,\int_{-\infty}^{t}\hat{e}_{-a_n}\left(t,\rho(s)\right)L_{\mathrm{n}}(s)\nabla s,\right.$$

$$\left.\int_{-\infty}^{t}\hat{e}_{-b_1}\left(t,\rho(s)\right)M_1(s)\nabla s,\cdots,\int_{-\infty}^{t}\hat{e}_{-b_m}\left(t,\rho(s)\right)M_{\mathrm{m}}(s)\nabla s\right\}$$

定义一个映射$T:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$：$T\left(Z(t)\right)=U_Z(t),\forall Z(t)\in\mathbb{B}$，我们接下来证明$T$是一个压缩映射。

首先证明，对于任意的$Z(t)\in E$，有$T\left(Z(t)\right)\in E$。

由条件$\left(\mathrm{H}_2\right)$和条件$\left(\mathrm{H}_3\right)$，有

$$L_i(t)\leqslant\left|a_i(t)\int_{t-\alpha_i(t)}^{t}\varphi_i^{\nabla}(s)\nabla s\right|+\left|\sum_{j=1}^{m}p_{ji}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)f_j\left(\psi_j(t-s)\right)\nabla s\right|+\left|I_i(t)\right|$$

$$\leqslant \overline{a}_i r_0 \overline{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_{ji} \int_0^{+\infty} \left|K_{ji}(s)\right| \left(F_j r_0 + \left|f_j(0)\right|\right) \nabla s + \overline{I}_i = A_i$$

且

$$M_j(t) \leqslant \left|b_j(t) \int_{t-\beta_j(t)}^{t} \psi_j^{\nabla}(s) \nabla s\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t) \int_0^{+\infty} L_{ij}(s) f_i\left(\varphi_i(t-s)\right) \nabla s\right| + \left|J_j(t)\right|$$

$$\leqslant \overline{b}_i r_0 \overline{\beta}_j + \sum_{i=1}^{n} \overline{q}_{ij} \left(F_i r_0 + \left|f_i(0)\right|\right) \int_0^{+\infty} \left|L_{ij}(s)\right| \nabla s + \overline{J}_j = B_j$$

则对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，得到

$$\left|\int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) L_i(s) \nabla s\right| \leqslant \int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) \left|L_i(s)\right| \nabla s \leqslant \int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) A_i \nabla s \leqslant \frac{A_i}{\underline{a}_i}$$

类似对于 $j = 1, 2, \cdots, m$，有 $\left|\int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-b_j}\left(t, \rho(s)\right) M_j(s) \nabla s\right| \leqslant \dfrac{B_j}{\underline{b}_j}$。

另一方面，对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，有

$$\left|\left(\int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) L_i(s) \nabla s\right)^{\nabla}\right| = \left|L_i(t) - a_i(t) \int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) L_i(s) \nabla s\right| \leqslant A_i + \overline{a}_i \frac{A_i}{\underline{a}_i} = \left(1 + \frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i}\right) A_i`$$

类似对于 $j = 1, 2, \cdots, m$，有 $\left|\left(\int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-b_j}\left(t, \rho(s)\right) M_j(s) \nabla s\right)^{\nabla}\right| \leqslant \left(1 + \dfrac{\overline{b}_j}{\underline{b}_j}\right) B_j$。

由条件 $\left(\mathrm{H}_3\right)$，得到

$$\left\|T\left(Z(t)\right)\right\|_{\mathbb{B}} \leqslant \max\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{\frac{A_i}{\underline{a}_i}, \left(1 + \frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i}\right) A_i\right\}, \max_{1 \leqslant j \leqslant m}\left\{\frac{B_j}{\underline{b}_j}, \left(1 + \frac{\overline{b}_j}{\underline{b}_j}\right) B_j\right\}\right\} \leqslant r_0,$$

也就是说，$T\left(Z(t)\right) \in E$。接下来，证明 T 是压缩映射。

对于任意的 $Z = \left(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m\right)^{\mathrm{T}} \in E, \tilde{Z} = \left(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \cdots, \tilde{\psi}_m\right)^{\mathrm{T}} \in E$，我们记

$$\begin{cases} P_i(t) = a_i(t) \int_{t-\alpha_i(t)}^{t} \left(\varphi_i^{\nabla}(s) - \tilde{\varphi}_i^{\nabla}(s)\right) \nabla s + \sum_{j=1}^{m} p_{ji}(t) \int_0^{+\infty} K_{ji}(s) \left(f_j\left(\psi_j(t-s)\right) - f_j\left(\tilde{\psi}_j(t-s)\right)\right) \nabla s, i = 1, 2, \cdots, n, \\ Q_j(t) = b_j(t) \int_{t-\beta_j(t)}^{t} \left(\psi_j^{\nabla}(s) - \tilde{\psi}_j^{\nabla}(s)\right) \nabla s + \sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t) \int_0^{+\infty} L_{ij}(s) \left(f_i\left(\varphi_i(t-s)\right) - f_i\left(\tilde{\varphi}_i(t-s)\right)\right) \nabla s, j = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

由条件 $\left(\mathrm{H}_2\right)$~$\left(\mathrm{H}_3\right)$，有

$$\left|P_i(t)\right| \leqslant \left(\overline{a}_i \cdot \overline{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_{ji} F_j \int_0^{+\infty} \left|K_{ji}(s)\right| \nabla s\right) \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}} = S_i \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}}$$

和

$$\left|Q_j(t)\right| \leqslant \left(\overline{b}_j \cdot \overline{\beta}_j + \sum_{i=1}^{n} \overline{q}_{ij} F_i \int_0^{+\infty} \left|L_{ij}(s)\right| \nabla s\right) \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}} = T_j \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}}$$

则对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，得到

$$\left|\int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) P_i(s) \nabla s\right| \leqslant \int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) \left|P_i(s)\right| \nabla s \leqslant \int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) S_i \nabla s \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}} \leqslant \frac{S_i}{\underline{a}_i} \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}}$$

类似对于 $j = 1, 2, \cdots, m$，有 $\left|\int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-b_j}\left(t, \rho(s)\right) Q_j(s) \nabla s\right| \leqslant \dfrac{T_j}{\underline{b}_j} \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}}$。

另一方面，对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，我们有

$$\left|\left(\int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) P_i(s) \nabla s\right)^{\nabla}\right| = \left|P_i(t) - a_i(t) \int_{-\infty}^{t} \hat{e}_{-a_i}\left(t, \rho(s)\right) P_i(s) \nabla s\right|$$

$$\leqslant \left(S_i + \overline{a}_i \frac{S_i}{\underline{a}_i}\right) \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}} = \left(1 + \frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i}\right) S_i \left\|Z - \tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}}$$

类似对于 $j=1,2,\cdots,m$，有 $\left|\left(\int_{-\infty}^{t}\hat{e}_{-b_j}\big(t,\rho(s)\big)Q_j(s)\nabla s\right)^{\nabla}\right| \leqslant \left(1+\frac{\overline{b}_j}{\underline{b}_j}\right)T_j\left\|Z-\tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}}$。则

$$\left\|TZ - T\tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}} \leqslant \max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{S_i}{\underline{a}_i},\left(1+\frac{\overline{a}_i}{\underline{a}_i}\right)S_i\right\},\max_{1\leqslant j\leqslant m}\left\{\frac{T_j}{\underline{b}_j},\left(1+\frac{\overline{b}_j}{\underline{b}_j}\right)T_j\right\}\right\}\left\|Z-\tilde{Z}\right\|_{\mathbb{B}}$$

因此，由条件 (H_3) 知，T 是一个压缩映射。所以 T 在 E 中有一个不动点。也就是说，系统（1）在 E 中有唯一的概周期解。证毕。

3　概周期解的指数稳定性

本节，我们给出了系统（1）概周期解全局指数稳定性的充分条件。

(H_4) 存在一个正常数 $r\in\mathbb{R}_{\nu}^{+}$ 和 ξ_i,η_j 使得对于 $t\in(0,+\infty)_{\mathbb{T}}, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m$，

$$\Big(r-\underline{a}_i(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\alpha_i(t)\big)\Big)\xi_i+\overline{a}_i(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\alpha_i(t)\big)\overline{\alpha}_i\xi_i+\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_{ji}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\big(\rho(t),t-s\big)\big|K_{ji}(s)\big|F_j\eta_j\nabla s<0,$$

$$\Big(r-\underline{b}_j(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\beta_j(t)\big)\Big)\eta_j+\overline{b}_j(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\beta_j(t)\big)\overline{\beta}_j\eta_j+\sum_{i=1}^{n}\overline{q}_{ij}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\big(\rho(t),t-s\big)\big|L_{ij}(s)\big|F_i\xi_i\nabla s<0,$$

$$r+\overline{a}_i(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\alpha_i(t)\big)+\overline{a}_i(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\alpha_i(t)\big)\overline{\alpha}_i+\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_{ji}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\big(\rho(t),t-s\big)\big|K_{ji}(s)\big|F_j\eta_j\xi_i^{-1}\nabla s<1,$$

$$r+\overline{b}_j(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\beta_j(t)\big)+\overline{b}_j(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,t-\beta_j(t)\big)\overline{\beta}_j+\sum_{i=1}^{n}\overline{q}_{ij}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\big(\rho(t),t-s\big)\big|L_{ij}(s)\big|F_i\xi_i\eta_j^{-1}\nabla s<1$$

定理2　设条件 $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_4)$ 成立。则系统（1）有一个全局指数稳定的概周期解。

证明　定理1告诉我们，系统（1）有一个概周期解。设

$$x^*(t)=\big(x_1^*(t),x_2^*(t),\cdots,x_n^*(t),y_1^*(t),y_2^*(t),\cdots,y_m^*(t)\big)^{\mathrm{T}}$$

就是这个解。我们证明 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的。设

$$x(t)=\big(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t)\big)^{\mathrm{T}}$$

是系统（1）的任意一个解。定义

$$\begin{cases}u_i(t)=x_i(t)-x_i^*(t), i=1,2,\cdots,n,\\ v_j(t)=y_j(t)-y_j^*(t), j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}u_i^{\nabla}(t)=-a_i(t)u_i\big(t-\alpha_i(t)\big)+\sum_{j=1}^{m}p_{ji}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)\Big(f_j\big(y_j(t-s)\big)-f_j\big(y_j^*(t-s)\big)\Big)\nabla s, i=1,2,\cdots,n,\\ v_j^{\nabla}(t)=-b_j(t)v_j\big(t-\beta_j(t)\big)+\sum_{i=1}^{n}q_{ij}(t)\int_0^{+\infty}L_{ij}(s)\Big(f_i\big(x_i(t-s)\big)-f_i\big(x_i^*(t-s)\big)\Big)\nabla s, j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

设

$$\begin{cases}X_i(t)=\hat{e}_r(t,0)u_i(t), i=1,2,\cdots,n,\\ Y_j(t)=\hat{e}_r(t,0)v_j(t), j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}X_i^{\nabla}(t)&=r\hat{e}_r(t,\ 0)u_i(t)+\hat{e}_r\big(\rho(t),\ 0\big)u_i^{\nabla}(t)\\&=r\hat{e}_r(t,\ 0)u_i(t)+\hat{e}_r\big(\rho(t),\ 0\big)\left[-a_i(t)u_i\big(t-\alpha_i(t)\big)+\sum_{j=1}^{m}p_{ji}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)\Big(f_j\big(y_j(t-s)\big)-f_j\big(y_j^*(t-s)\big)\Big)\nabla s\right]\\&=r\hat{e}_r(t,\ 0)u_i(t)-a_i(t)(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,\ t-\alpha_i(t)\big)X_i\big(t-\alpha_i(t)\big)\\&\quad+\hat{e}_r\big(\rho(t),\ 0\big)\left[\sum_{j=1}^{m}p_{ji}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)\Big(f_j\big(y_j(t-s)\big)-f_j\big(y_j^*(t-s)\big)\Big)\nabla s\right]\end{aligned}$$

$$= rX_i(t) + a_i(t)(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,\ t-\alpha_i(t)\big)\int_{t-\alpha_i(t)}^{t} X_i^{\nabla}(s)\nabla s - a_i(t)(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,\ t-\alpha_i(t)\big)X_i(t)$$
$$+\hat{e}_r\big(\rho(t),\ 0\big)\left[\sum_{j=1}^{m} p_{ji}(t)\int_0^{+\infty} K_{ji}(s)\Big(f_j\big(y_j(t-s)\big)-f_j\big(y_j^*(t-s)\big)\Big)\nabla s\right]$$
$$= \Big(r - a_i(t)(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,\ t-\alpha_i(t)\big)\Big)X_i(t) + a_i(t)(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t,\ t-\alpha_i(t)\big)\int_{t-\alpha_i(t)}^{t} X_i^{\nabla}(s)\nabla s$$
$$+\hat{e}_r\big(\rho(t),\ 0\big)\left[\sum_{j=1}^{m} p_{ji}(t)\int_0^{+\infty} K_{ji}(s)\Big(f_j\big(y_j(t-s)\big)-f_j\big(y_j^*(t-s)\big)\Big)\nabla s\right]$$

类似有

$$Y_j^{\nabla}(t) = \Big(r - b_j(t)(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t, t-\beta_j(t)\big)\Big)Y_j(t) + b_j(t)(1-\nu r)\hat{e}_r\big(t, t-\beta_j(t)\big)\int_{t-\beta_j(t)}^{t} Y_j^{\nabla}(s)\nabla s$$
$$+\hat{e}_r\big(\rho(t), 0\big)\left[\sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t)\int_0^{+\infty} L_{ij}(s)\Big(f_i\big(x_i(t-s)\big)-f_i\big(x_i^*(t-s)\big)\Big)\nabla s\right]$$

记

$$\tilde{M} = \max\left\{\max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{s\in(-\infty,0]_{\mathbb{T}}}\left|X_i(s)\right|\right\}, \max_{1\le i\le n}\left\{\sup_{s\in(-\infty,0]_{\mathbb{T}}}\left|X_i^{\nabla}(s)\right|\right\}, \max_{1\le j\le m}\left\{\sup_{s\in(-\infty,0]_{\mathbb{T}}}\left|Y_j(s)\right|\right\}, \max_{1\le j\le m}\left\{\sup_{s\in(-\infty,0]_{\mathbb{T}}}\left|Y_j^{\nabla}(s)\right|\right\}\right\}$$

存在 $K>0$ 使得

$$\left|X_i(t)\right| \le \tilde{M} < K\xi_i,\ \left|X_i^{\nabla}(t)\right| \le \tilde{M} < K\xi_i,\ \left|Y_j(t)\right| \le \tilde{M} < K\eta_j,\ \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| \le \tilde{M} < K\eta_j$$

对于 $t\in(-\infty,0]_{\mathbb{T}}, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m$ 成立。

我们声明对 $t\in\mathbb{T}, t>0, i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m$，有

$$\left|X_i(t)\right| < K\xi_i,\ \left|Y_j(t)\right| < K\eta_j,\ \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < K\xi_i,\ \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < K\eta_j \tag{6}$$

否则，存在 $t_1>0, i_0\in\{1,\cdots,n\}$ 或者 $j_0\in\{1,\cdots,m\}$，使得对于 $i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m$，发生下列情形之一：

（Ⅰ）$\left|X_{i_0}(t_1)\right| \ge K\xi_{i_0}$，有 $\left|X_i(t)\right| < K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < K\xi_i, \left|Y_j(t)\right| < K\eta_j, \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < K\eta_j$，对于 $t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$；

（Ⅱ）$\left|X_{i_0}^{\nabla}(t_1)\right| \ge K\xi_{i_0}$，有 $\left|X_i(t)\right| < K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < K\xi_i, \left|Y_j(t)\right| < K\eta_j, \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < K\eta_j$，对于 $t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$；

（Ⅲ）$\left|Y_{j_0}(t_1)\right| \ge K\eta_{j_0}$，有 $\left|Y_j(t)\right| < K\eta_{j,} \left|X_i(t)\right| < K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < K\xi_i, \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < K\eta_j$，对于 $t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$；

（Ⅳ）$\left|Y_{j_0}^{\nabla}(t_1)\right| \ge K\eta_{j_0}$，有 $\left|Y_j(t)\right| < K\eta_{j,} \left|X_i(t)\right| < K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < K\xi_i, \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < K\eta_j$，对于 $t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$。

设 $\delta_1 = \dfrac{\left|X_{i_0}(t_1)\right|}{K\xi_{i_0}}, \delta_2 = \dfrac{\left|X_{i_0}^{\nabla}(t_1)\right|}{K\xi_{i_0}}, \delta_3 = \dfrac{\left|Y_{j_0}(t_1)\right|}{K\eta_{j_0}}, \delta_4 = \dfrac{\left|Y_{j_0}^{\nabla}(t_1)\right|}{K\eta_{j_0}}$，则 $\delta_1\ge 1, \delta_2\ge 1, \delta_3\ge 1, \delta_4\ge 1$ 使得下列情形之一发生：

（Ⅰ′）$\left|X_{i_0}(t_1)\right| = \delta_1 K\xi_{i0}$，有 $X_i(t) < \delta_1 K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < \delta_1 K\xi_i, \left|Y_j(t)\right| < \delta_1 K\eta_j, \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < \delta_1 K\eta_j, t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$；

（Ⅱ′）$\left|X_{i_0}^{\nabla}(t_1)\right| = \delta_2 K\xi_{i0}$，有 $X_i^{\nabla}(t) < \delta_2 K\xi_i, \left|X_i(t)\right| < \delta_2 K\xi_i, \left|Y_j(t)\right| < \delta_2 K\eta_j, \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < \delta_2 K\eta_j, t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$；

（Ⅲ′）$\left|Y_{j_0}(t_1)\right| = \delta_3 K\eta_{j_0}$，有 $\left|Y_j(t)\right| < \delta_3 K\eta_{j,} \left|X_i(t)\right| < \delta_3 K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < \delta_3 K\xi_i, \left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < \delta_3 K\eta_j,\ t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$；

（Ⅳ′）$\left|Y_{j_0}^{\nabla}(t_1)\right| = \delta_4 K\eta_{j0}$，有 $\left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < \delta_4 K\eta_j, \left|X_i(t)\right| < \delta_4 K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < \delta_4 K\xi_i, \left|Y_j(t)\right| < \delta_4 K\eta_j, t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$。

如果情形（Ⅰ′）发生，则有两种情况：

（i）$X_{i_0}(t_1) = \delta_1 K\xi_{i_0}$，$X_{i_0}^{\nabla}(t_1) \ge 0$，对于 $t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$，有 $\left|X_i(t)\right| < \delta_1 K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < \delta_1 K\xi_i, \left|Y_j(t)\right| < \delta_1 K\eta_j$，$\left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < \delta_1 K\eta_j$；

（ii）$X_{i_0}(t_1) = -\delta_1 K\xi_{i_0}$，$X_{i_0}^{\nabla}(t_1) \le 0$，对于 $t\in(-\infty,t_1)_{\mathbb{T}}$，有 $\left|X_i(t)\right| < \delta_1 K\xi_i, \left|X_i^{\nabla}(t)\right| < \delta_1 K\xi_i, \left|Y_j(t)\right| < \delta_1 K\eta_j$，

$\left|Y_j^{\nabla}(t)\right| < \delta_1 K\eta_j$。

对于情况（i），由条件$\left(\mathrm{H}_4\right)$得到

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant X_{i_0}^{\nabla}\left(t_1\right)\\
&\leqslant \left[r - a_{i_0}\left(t_1\right)(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\right]X_{i_0}\left(t_1\right) + a_{i_0}\left(t_1\right)(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\int_{t_1-\alpha_{i_0}(t_1)}^{t_1}\left|X_{i_0}^{\nabla}(s)\right|\nabla s\\
&\quad +\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ 0\right)\sum_{j=1}^{m}\left|p_{ji_0}\left(t_1\right)\right|\left|\int_0^{+\infty}\left|K_{ji_0}(s)\right|\left|f_j\left(y_j\left(t_1-s\right)\right)-f_j\left(y_j^{*}\left(t_1-s\right)\right)\right|\nabla s\right.\\
&\leqslant \left[r - \underline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\right]\delta_1 K\xi_{i_0} + \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\overline{\alpha_{i_0}}\,\delta_1 K\xi_{i_0}\\
&\quad +\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ 0\right)\sum_{j=1}^{m}\left|p_{ji_0}\left(t_1\right)\right|\left|\int_0^{+\infty}\left|K_{ji_0}(s)\right|F_j\left|v_j\left(t_1-s\right)\right|\nabla s\right.\\
&\leqslant \left\{\left[r - \underline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\right]\xi_{i_0} + \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\overline{\alpha_{i_0}}\,\xi_{i_0}\right.\\
&\quad \left.+\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{ji_0}}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ t_1-s\right)\left|K_{ji_0}(s)\right|F_j\eta_j\nabla s\right\}\delta_1 K\\
&< 0
\end{aligned}
$$

这是一个矛盾。

对于情况（ii），由条件$\left(\mathrm{H}_4\right)$有

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant X_{i_0}^{\nabla}\left(t_1\right)\\
&\geqslant \left[r - a_{i_0}\left(t_1\right)(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\right]X_{i_0}\left(t_1\right) - a_{i_0}\left(t_1\right)(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\int_{t_1-\alpha_{i_0}(t_1)}^{t_1}\left|X_{i_0}^{\nabla}(s)\right|\nabla s\\
&\quad -\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ 0\right)\sum_{j=1}^{m}\left|p_{ji_0}\left(t_1\right)\right|\left|\int_0^{+\infty}\left|K_{ji_0}(s)\right|\left|f_j\left(y_j\left(t_1-s\right)\right)-f_j\left(y_j^{*}\left(t_1-s\right)\right)\right|\nabla s\right.\\
&\geqslant \left[\underline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right) - r\right]\delta_1 K\xi_{i_0} - \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\overline{\alpha_{i_0}}\,\delta_1 K\xi_{i_0}\\
&\quad -\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ 0\right)\sum_{j=1}^{m}\left|p_{ji_0}\left(t_1\right)\right|\left|\int_0^{+\infty}\left|K_{ji_0}(s)\right|F_j\left|v_j\left(t_1-s\right)\right|\nabla s\right.\\
&\geqslant \left\{\left[\underline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right) - r\right]\xi_{i_0} - \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\overline{\alpha_{i_0}}\,\xi_{i_0}\right.\\
&\quad \left.-\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{ji_0}}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ t_1-s\right)\left|K_{ji_0}(s)\right|F_j\eta_j\nabla s\right\}\delta_1 K\\
&> 0
\end{aligned}
$$

矛盾，所以情形（Ⅰ′）是不成立的。

如果情形（Ⅱ′）发生，不失一般性，我们设$\left|X_{i_0}\left(t_1\right)\right| \leqslant \delta_2 K\xi_{i_0}$，否则和情形（Ⅰ′）一样。类似情形（Ⅰ′），由条件$\left(\mathrm{H}_4\right)$有

$$
\begin{aligned}
\delta_2 K\xi_{i_0} &\leqslant \left[r + a_{i_0}\left(t_1\right)(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\right]\left|X_{i_0}\left(t_1\right)\right| + a_{i_0}\left(t_1\right)(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\int_{t_1-\alpha_{i_0}(t_1)}^{t_1}\left|X_{i_0}^{\nabla}(s)\right|\nabla s\\
&\quad +\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ 0\right)\sum_{j=1}^{m}\left|p_{ji_0}\left(t_1\right)\right|\left|\int_0^{+\infty}\left|K_{ji_0}(s)\right|\left|f_j\left(y_j\left(t_1-s\right)\right)-f_j\left(y_j^{*}\left(t_1-s\right)\right)\right|\nabla s\right.\\
&\leqslant \left[r + \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\right]\delta_2 K\xi_{i_0} + \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\overline{\alpha_{i_0}}\,\delta_2 K\xi_{i_0}\\
&\quad +\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{ji_0}}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),\ t_1-s\right)\left|K_{ji_0}(s)\right|F_j\eta_j\delta_2 K\nabla s\\
&\leqslant \left\{r + \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right) + \overline{a_{i_0}}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t_1,\ t_1-\alpha_{i_0}\left(t_1\right)\right)\overline{\alpha_{i_0}}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\overline{p_{ji_0}}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\left(\rho\left(t_1\right),t_1-s\right)\left|K_{ji_0}(s)\right|F_j\eta_j\xi_{i0}^{-1}\nabla s\Big\}\delta_2K\xi_{i_0}$$

$$<\delta_2K\xi_{i_0}$$

这是一个矛盾。类似，我们可以证明情形（Ⅲ′）~（Ⅳ′）是不成立的。因此，对于 $t\in\mathbb{T},t>0$，有 $\left|X_i(t)\right|<K\xi_i,\left|Y_j(t)\right|<K\eta_j,i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$。所以，对于 $t\in\mathbb{T},i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$ 有

$$\left|x_i(t)-x_i^*(t)\right|\leqslant\hat{e}_{\Theta_\nu r}(t,0)K\xi_i,\quad\left|y_j(t)-y_j^*(t)\right|\leqslant\hat{e}_{\Theta_\nu r}(t,0)K\eta_j$$

设 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m}\left\{K\xi_i,K\eta_j\right\}$。对于 $t\in\mathbb{T}$，有

$$\left|x_i(t)-x_i^*(t)\right|\leqslant M\hat{e}_{\Theta_\nu r}(t,0),\quad\left|y_j(t)-y_j^*(t)\right|\leqslant M\hat{e}_{\Theta_\nu r}(t,0),i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m。$$ 证毕。

4　例子和数值模拟

在本节，对于 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$，我们给出一个例子来证明前面得到结果的正确性。

考虑下列 BAM 神经网络系统，$n=2,m=2$，

$$\begin{cases}x_1^{\nabla}(t)=-\dfrac{1}{3}x_1\left(t-\alpha_1(t)\right)+\dfrac{1}{20}\sin\dfrac{\pi t}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_1\left(y_1(t-s)\right)\nabla s+\dfrac{1}{20}\sin\dfrac{\pi t}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_2\left(y_2(t-s)\right)\nabla s+I_1(t),\\ x_2^{\nabla}(t)=-\dfrac{1}{5}x_2\left(t-\alpha_2(t)\right)+\dfrac{1}{50}\sin\dfrac{\pi t}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_1\left(y_1(t-s)\right)\nabla s+\dfrac{1}{100}\sin\dfrac{\pi t}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_2\left(y_2(t-s)\right)\nabla s+I_2(t),\\ y_1^{\nabla}(t)=-\dfrac{1}{2}y_1\left(t-\beta_1(t)\right)+\dfrac{1}{20}\cos t\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_1\left(x_1(t-s)\right)\nabla s+\dfrac{1}{20}\cos t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_2\left(x_2(t-s)\right)\nabla s+J_1(t),\\ y_2^{\nabla}(t)=-\dfrac{1}{4}y_2\left(t-\beta_2(t)\right)+\dfrac{1}{50}\cos t\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_1\left(x_1(t-s)\right)\nabla s+\dfrac{1}{100}\cos t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}f_2\left(x_2(t-s)\right)\nabla s+J_2(t)\end{cases}\quad(7)$$

其中

$$a_1(t)=\frac{1}{3},a_2(t)=\frac{1}{5},b_1(t)=\frac{1}{2},b_2(t)=\frac{1}{4},f_1(x)=f_2(x)=\sin\frac{1}{2}x,$$

$$p_{11}(t)=\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{2},p_{21}(t)=\frac{1}{20}\sin\frac{\pi t}{2},p_{12}(t)=\frac{1}{50}\sin\frac{\pi t}{2},p_{22}(t)=\frac{1}{100}\sin\frac{\pi t}{2},$$

$$q_{11}(t)=\frac{1}{20}\cos t,q_{21}(t)=\frac{1}{20}\cos t,q_{12}(t)=\frac{1}{50}\cos t,q_{22}(t)=\frac{1}{100}\cos t,$$

$$\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=\beta_1(t)=\beta_2(t)=0.1,\quad K_{ji}(s)=L_{ij}(s)=\mathrm{e}^{-s},i=1,2,j=1,2,$$

$$I_1(t)=I_2(t)=\frac{1}{10}\sin\frac{\pi t}{2},J_1(t)=J_2(t)=\frac{1}{10}\cos t$$

对于 $\mathbb{T}=\mathbb{Z},\rho(t)=t-1,\nu(t)=1$。我们有 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}\nabla s=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$，显然条件 (H_1) 成立。

因为 $\left|f_1(x_1)-f_1(x_2)\right|\leqslant\left|x_1-x_2\right|,\left|f_2(x_1)-f_2(x_2)\right|\leqslant\left|x_1-x_2\right|$，对于 $F_1=F_2=1$，条件 (H_2) 成立。

设 $r_0=1$，我们有 $A_1=\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{10}\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},A_2=\dfrac{3}{25}+\dfrac{3}{100}\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},B_1=\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{10}\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},B_2=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{100}\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$。因此，

$$\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{A_i}{\underline{a_i}},\left(1+\frac{\overline{a_i}}{\underline{a_i}}\right)A_i\right\},\max_{1\leqslant j\leqslant m}\left\{\frac{B_j}{\underline{b_j}},\left(1+\frac{\overline{b_j}}{\underline{b_j}}\right)B_j\right\}\right\}=3A_1\approx0.875<1$$

另一方面，我们可以得到

$$S_1=\frac{1}{30}+\frac{1}{10}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},S_2=\frac{1}{50}+\frac{3}{100}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},T_1=\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1},T_2=\frac{1}{40}+\frac{3}{100}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

则有

$$\max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{S_i}{\underline{a_i}},\left(1+\frac{\overline{a_i}}{\underline{a_i}}\right)S_i\right\},\max_{1\leqslant j\leqslant m}\left\{\frac{T_j}{\underline{b_j}},\left(1+\frac{\overline{b_j}}{\underline{b_j}}\right)T_j\right\}\right\}=3S_1\approx0.575<1$$

从而条件$\left(\mathrm{H}_3\right)$成立。

设$r=10^{-6},\xi_1=\xi_2=\eta_1=\eta_2=1$，则可求得

$$\left(r-\underline{a_1}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t,\ t-\alpha_1(t)\right)\right)\xi_1+\overline{a_1}(1-\nu r)\hat{e}_r\left(t,\ t-\alpha_1(t)\right)\overline{\alpha_1}\xi_1+\overline{p_{11}}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\left(\rho(t),\ t-s\right)\left|K_{11}(s)\right|F_1\eta_1\nabla s$$
$$+\overline{p_{21}}\int_0^{+\infty}\hat{e}_r\left(\rho(t),\ t-s\right)\left|K_{21}(s)\right|F_2\eta_2\nabla s\approx-0.142<0$$

类似地可验证条件$\left(\mathrm{H}_4\right)$成立。

由定理1，系统（7）在$E:=\left\{\varphi\in\mathbb{B}:\|\varphi\|_{\mathbb{B}}\leqslant 1\right\}$中有唯一的概周期解。由定理2，这个解是全局指数稳定的。取初值$\varphi_1(s)=0.3,\varphi_2(s)=0.2,\psi_1(s)=0.15,\psi_2(s)=0.25,s\in(-\infty,0]_{\mathbb{T}}$，我们给出下列数值模拟的图像来说明在时标上结果的正确和可信性（见图1~2）。

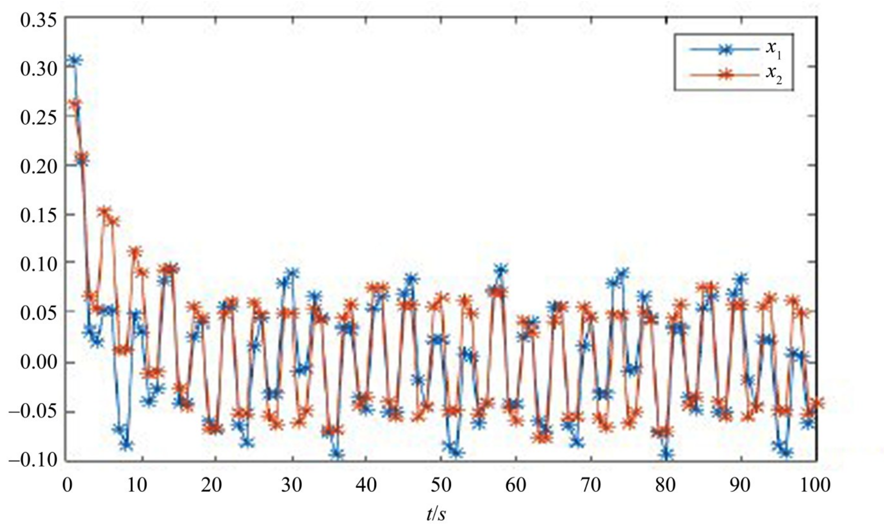

图1 状态变量x_1和x_2的轨迹图

Fig. 1 Transient response of state variables $x_1$and x_2

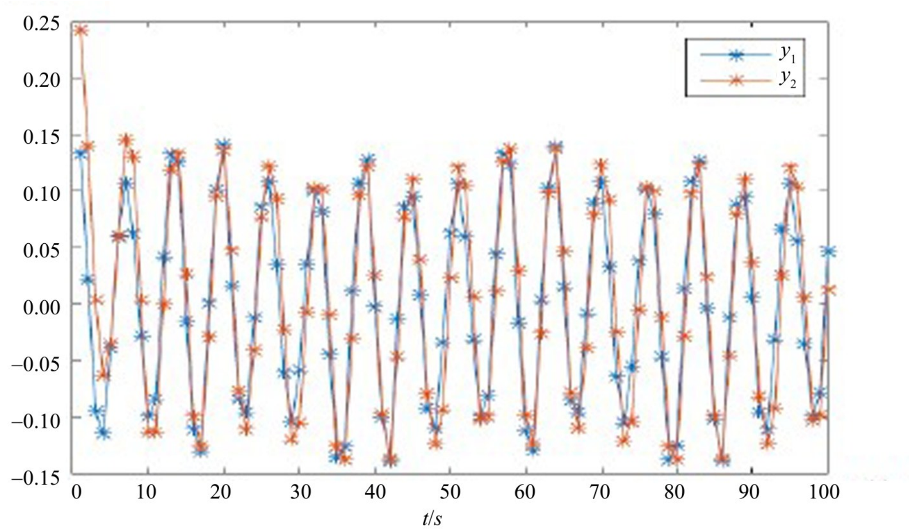

图2 状态变量y_1和y_2的轨迹图

Fig. 2 Transient response of state variables y_1 and y_2

5 结 论

本文给出了时标上的Leakage项变时滞双向联想记忆（BAM）神经网络系统概周期解存在性、唯一性和全局指数稳定性的充分条件，另外还在$\mathbb{T}=\mathbb{Z}$上，给出了一个例子和数值模拟来说明得到结果的正确性。本文所用的方法后续可以推广运用到其他神经网络系统的研究上。

参考文献：

[1] KOSKO B. Neural networks and fuzzy systems [M]. New Delhi: Prentice Hall, 1992.

[2] KOSKO B. Adaptive bidirectional associative memories [J]. Applied Optics, 1987, 26(23): 4947-4960.

[3] KOSKO B. Bidirectional associative memories [J]. Systems Man & Cybernetics IEEE Transactions on, 1988, 18(1): 49-60.

[4] CHEN A P, HUANG L H, CAO J D. Existence and stability of almost periodic solution for BAM neural networks with delays [J]. Appl Math Comput, 2003, 137(1): 177-193.

[5] LIU Z G, CHEN A P, CAO J D, et al. Existence and global exponential stability of almost periodic solutions of BAM neural networks with continuously distributed delays [J]. Phys Lett A, 2003, 319(3/4): 305-316.

[6] BAO H M. Existence and exponential stability of periodic solution for BAM fuzzy Cohen-Grossberg neural networks with mixed delays [J]. Neural Process Lett, 2016, 43(3): 871-885.

[7] XIA Y H, CAO J D, LIN M R. New results on the existence and uniqueness of almost periodic solution for BAM neural networks with continuously distributed delays [J]. Chaos Soliton Fract, 2007, 31(4): 928-936.

[8] ZHANG L J. Existence and global attractivity of almost periodic solution for BAM neural networks with variable coefficients and delays [J]. Journal of Biomathematics, 2007, 22(3): 403-412.

[9] 高瑾，程世辉，王其如，二阶非线性中立型时标动态方程非振动解的存在性[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2009，48(6)：23-26.
GAO J, CHENG S H, WANG Q R. Existence of nonoscillatory solutions to second-order nonlinear neutral dynamic equations on time scales [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2009, 48(6): 23-26.

[10] 邱仰聪，王其如，一类二阶非线性时标动态方程新的Kamenev型振动准则[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2013，52(6)：26-29，33.
QIU Y C, WANG Q R. New Kamenev-type oscillation criteria for second-order nonlinear dynamic equations on time scales [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(6): 26-29, 33.

[11] GAO J, WANG Q R, ZHANG L W. Existence and stability of almost-periodic solutions for cellular neural networks with time-varying delays in leakage terms on time scales [J]. Appl Math Comput, 2014, 237(3): 639-649.

[12] GAO J, WANG Q R, LIN Y. Existence and exponential stability of almost-periodic solutions for neutral BAM neural networks with time-varying delays in leakage terms on time scales [J]. Math Method Appl Sci, 2016, 39(6): 1361-1375.

[13] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time Scales: An introduction with applications [M]. Boston: Birkhäuser, 2001.

[14] LI Y K, WANG C. Uniformly almost periodic functions and almost periodic solutions to dynamic equations on time scales [J]. Abstr Appl Anal, 2011, 2011(Article ID 341520): 1-22.

[15] BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equations on time scales [M]. Boston: Birkhäuser, 2003.

（责任编辑 冯兆永）